REPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAUREAT

2012 – MATHEMATIQUES
Série : C - E
Durée : 4 h
Coef. : 5

Exercice 1 (*5 points*)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé$(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On considère la courbe paramétrée (C) définie par :

$$\begin{cases} x(t) = e^t - e^{-t} \\ y(t) = e^t + e^{-t} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

et M(t) est le point de coordonnées $(x(t)\,;\,y(t))$

1. a) Démontrer, en comparant $\mathrm{M}(-t)$ et $\mathrm{M}(t)$, que la courbe admet un axe de symétrie.
   b) Etudier les variations des fonctions x et y sur $[0;\,+\infty\,[$
   c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe (C) au point $\mathrm{A}(x(0)\,;\,y(0))$
2. a) Calculer $x(t)^2 - y(t)^2$
   b) En déduire que la courbe (C) est une partie d'une conique(H).
   c) Déterminer les asymptotes, l'axe focal, les foyers et l'excentricité de (H)
3. Tracer (C) et (H) sur la même figure.

Exercice 2 (*5 points*)

Soit f une application de l'espace $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(-x + 2y - 2z + 2) \\ y' = \dfrac{1}{3}(\,2x + 2y + z - 1\,) \\ z' = \dfrac{1}{3}(-2x + y + 2z + 1) \end{cases}$$

1) Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est le plan $(\mathcal{P})$ d'équation :
   $2x - y + z - 1 = 0$
2) Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de l'espace, et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ son image par f.
   a) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ garde une direction constante.
   Indication : On peut montrer que : $\overrightarrow{MM'} = \lambda(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k})$ où λ est un réel.
   b) En déduire la position relative de la droite (MM') et le plan $(\mathcal{P})$.
   c) Démontrer que le milieu I du segment [MM'] appartient à $(\mathcal{P})$.
   d) Déterminer : $f \circ f\,(M)$.
   e) En déduire des questions précédentes la nature de f.
3) On considère le plan $(\mathcal{Q})$ d'équation cartésienne : $x + y - z + 2 = 0$.
   a) Justifier que les plans (P) et $(\mathcal{Q})$ sont perpendiculaires.
   b) Soit (Δ) la droite d'intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$. Déterminer une équation paramétrique de (Δ).
4) Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan $(\mathcal{Q})$. On pose : $g = f \circ s$.
   a) Soit $A\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que A est un point de $(\mathcal{Q})$.
   b) Montrer que g est un demi-tour dont on précisera l'axe.

c) Déterminer les coordonnées de A', où $A' = g(A)$.

'roblème : (10 points)

$\imath$ est un entier naturel non nul. On considère la famille de fonctions f_n définies sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_n(x)=(x-1)^n \ln x$.

Et on note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\ I,\ J)$ d'unité graphique : 2 cm.

Partie I : Etude d'une fonction auxiliaire

n est un entier naturel non nul. On considère la famille de fonctions g_n définies sur $]0\,;+\infty[$ par : $g_n(x)=n\ln x+\dfrac{x-1}{x}$.

1) Etudier les variations de la fonction g_n sur $]0\,;+\infty[$.
2) a) Calculer la limite de g_n en 0 et en $+\infty$.
   b) Calculer $g_n(1)$ et en déduire le signe de $g_n(x)$.
   c) Dresser le tableau de variations de g_n.

Partie II : Etude de la fonction f_n

1) Vérifier que toutes les courbes (C_n) passent par un même point dont on déterminera les coordonnées.
2) a) Justifier la dérivabilité de f_n sur $]0\,;+\infty[$.
   b) Soit f_n' la fonction dérivée de f_n. Déterminer $f_n'(x)$ pour $x\in\,]0\,;+\infty[$ et montrer que : $f_n'(x)=(x-1)^{n-1}g_n(x)$.
3) En utilisant la partie I et suivant la parité de n :
   a) Déterminer les variations de f_n.
   b) Déterminer la limite de f_n en 0 et en $+\infty$.
   c) Dresser le tableau de variation de f_n.
4) Construire $\mathcal{C}_2$.

Partie III : Etude d'une suite intégrale

Pour tout entier naturel n non nul, on note : $I_n=\int_1^2 f_n(x)dx$.

1) Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in IN^*}$ est décroissante et qu'elle converge.
2) a) Démontrer que pour tout $x\in[1\,;2]$: $\ln x\le x$.
   Indication : On pourra étudier la fonction : $x\mapsto \ln x - x$.
   b) En déduire que pour $x\in[1\,;2]$ et $\forall n\in IN^*$: $f_n(x)\le x(x-1)^n\le 2(x-1)^n$.
   c) En déduire la limite de la suite (I_n).

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES SERIE C ET E

Exercice 1

$$(C);\begin{cases} x(t) = e^{t} - e^{-t} \\ y(t) = e^{t} + e^{-t} \end{cases} \qquad (t \in IR)$$

1 .a) Démontrons que (C) admet un axe de symétrie

Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x(-t) = e^{-t} - e^{t} = -x(t) \\ y(-t) = e^{-t} + e^{t} = y(t) \end{cases}$

M(-t) et M(t) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Donc (C) admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

b) Etudions les variations de x et y sur [0 ; + ∞ [

(C) admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, donc on peut étudier (C) sur [0 ; + ∞ [. Les fonctions x et y sont dérivables sur [0 ; + ∞ [comme sommes de fonctions dérivables et pour tout réel positif t :

$x'(t) = e^{t} + e^{-t} > 0$; $y'(t) = e^{t} - e^{-t} \geq 0$ car $pour\ t \geq 0$; $e^{t} \geq e^{-t}$

Donc x et y sont strictement croissantes sur [0 ; + ∞ [.D'où le tableau de variations commun

T	0		+ ∞
x'(t)	2	+	
x(t)	0	↗	+ ∞
y'(t)		+	
y(t)	0	↗	+ ∞

c) Déterminons une équation de la tangente à la courbe (C) en A(x(0) ;y(0))

x'(0)=2 et y'(0) = 0 donc $\vec{u}(2; 0)$ est un vecteur directeur de la tangente en A(0 ;2). Ainsi la tangente en A a pour équation : y = 2.

2.a)Calculons $(x(t))^2 - (y(t))^2$

$(x(t))^2 - (y(t))^2 = (e^{t} - e^{-t})^2 - (e^{t} + e^{-t})^2 = -4$

b) Déduisons-en que (C) est une partie d'une conique (H)

$x^2 - y^2 = -4$ donc $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$ qui est l'équation réduite d'une hyperbole.

Or pour tout réel t , y(t) > 0 , donc (C) est une partie de (H).

c) Déterminons les asymptotes, l'axe focal , les foyers et l'excentricité de (H).

$a^2 = b^2$, donc l'hyperbole (H) est équilatère ; elle a pour excentricité $\sqrt{2}$, ses asymptotes sont les droites d'équations y = x et y = - x, son axe focal est l'axe des ordonnées . D'autre part $c^2 = a^2 + b^2 = 8$, d'où $c = 2\sqrt{2}$, donc les foyers de (H) sont : $F(0; 2\sqrt{2})$ et $F'(0; -2\sqrt{2})$

3. **Traçons (C) et (H)** (Voir feuille jointe 7/7)

Exercice 2

Soit $f: \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x + 2y - 2z + 2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + 2y + z - 1) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + y + 2z + 1) \end{cases}$

1) Démontrons que l'ensemble des points invariants est le plan (P)

$x' = x \iff -x + 2y - 2z + 2 = 3x$
$\iff -4x + 2y - 2z + 2 = 0$
$\iff 2x - y + z - 1 = 0$

$y' = y \iff 2x + 2y + z - 1 = 3y$

$\iff 2x - y + z - 1 = 0$

$z' = z \iff -2x + y + 2z + 1 = 3z$

$\iff -2x + y - z + 1 = 0$

$\iff 2x - y + z - 1 = 0$

Donc l'ensemble des points invariants par f est le plan (P) d'équation : $2x - y + z - 1 = 0$

2) a) Vérifions que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ garde une direction constante

$x' - x = \frac{1}{3}(-x + 2y - 2z + 2 - 3x)$
$= -\frac{2}{3}(2x - y + z - 1)$
$= 2\left(-\frac{1}{3}(2x - y + z - 1)\right)$
$= 2\lambda$

$y' - y = \frac{1}{3}(2x + 2y + z - 1 - 3y)$
$= \frac{1}{3}(2x - y + z - 1)$
$= -\lambda$

$z' - z = \frac{1}{3}(-2x + y + 2z + 1 - 3z)$
$= -\frac{1}{3}(2x - y + z - 1) = \lambda$

On a : $\overrightarrow{MM'}(\alpha ; \beta ; \gamma)$ où $\alpha = 2\lambda ; \beta = -\lambda ; \gamma = \lambda$ avec
$\lambda = -\frac{1}{3}(2x - y + z - 1)$ donc : $\overrightarrow{MM'} = \lambda(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$

b) **Déduisons-en la position relative de (MM') et (P)**

$\overrightarrow{MM'} = \lambda(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ or $\vec{n} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ est un vecteur normal à (P)
Donc la droite (MM') est perpendiculaire à (P)

a) **Démontrons que le milieu I de [MM'] appartient à (P)**

$2\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{y+y'}{2} + \frac{z+z'}{2} - 1 = 2\left(\frac{1}{6}(3x - x + 2y - 2z + 2) - \frac{1}{6}(3y + 2x + 2y + z - 1) + \frac{1}{6}(3z - 2x + y + 2z + 1) - 1\right.$

$= \frac{1}{6}(4x + 4y - 4z + 4 - 2x - 5y - z + 1 + 3z - 2x + y + 2z + 1 - 6) = 0$

donc I appartient à (P)

d) Déterminons $fof(M)$

$$fof(M) = f(M') = M''$$

$x'' = \frac{1}{3}(-x' + 2y' - 2z' + 2)$
$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}(x - 2y + 2z - 2 + 4x + 4y + 2z - 2 + 4x - 2y - 4z - 2 + 6)\right]$
$= \frac{1}{9}(9x) = x$

$y'' = \frac{1}{3}(2x' + 2y' + z' - 1)$

$= \frac{1}{3} [\frac{1}{3} (-2x + 4y - 4z + 4 + 4x + 4y + 2z - 2 - 2x + y + 2z + 1 - 3)]$

$= \frac{1}{9} (9y) = y$

$z'' = \frac{1}{3} (-2x' + y' + 2z' + 1)$

$= \frac{1}{3} [\frac{1}{3} (2x - 4y + 4z - 4 + 2x + 2y + z - 1 - 4x + 2y + 4z + 2 + 3)]$

$= \frac{1}{9} (9z) = z$

D'où $fof(M) = M$

e) Déduisons-en la nature de f

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \lambda\vec{n} \text{ où } \vec{n} \text{ est normal à } (P) \\ (MM') \text{ est perpendiculaire à } (P) \\ \text{I milieu de } [MM'] \text{ appartient à } (P) \end{cases}$$

Donc f est la réflexion de plan (P)

3). Soit le plan (Q) : x + y –z + 2 = 0

a) Justifions que (P) et (Q) sont perpendiculaires

$\vec{n}\,(2\,;\,-1\,;1)$ est un vecteur normal à (P) et $\overrightarrow{n'}\ (1\,;\,1\,;-1)$ est un vecteur normal à (Q). Or $\vec{n}.\overrightarrow{n'} = 2 - 1 - 1 = 0$. Ces vecteurs normaux sont orthogonaux , donc (P) et (Q) sont perpendiculaires.

b) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ)

$\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ d'où $x = -\frac{1}{3}$; $z = y + \frac{5}{3}$ donc une représentation paramétrique de (Δ) est

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = t \\ z = t + \frac{5}{3} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

4) On pose : g = fos

a)Vérifions que A appartient à (Q)

- 1 – 1 + 0 + 2 = 0 donc A ∈ (Q)

b) Montrons que g est un demi-tour et précisons son axe

g est la composée de deux réflexions des plans (P) et (Q), perpendiculaires et sécants suivant la droite (Δ) , donc g est le demi-tour d'axe (Δ).

c) Déterminons les coordonnées de A'

A ' = g(A) = fos(A) = f(A) . On obtient par calcul $A' \left(\frac{1}{3}\,;\,-\frac{5}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$

Problème

Partie I

1) Etudions les variations de g_n sur $]0 ; +\infty[$

g_n est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et pour tout réel $x > 0$
$g_n'(x) = \frac{n}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ donc g_n est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

2)a) Calculons les limites de g_n en 0 et en $+\infty$

$\lim_{x\to 0} g_n(x) = \lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}(nx\ln x + x - 1)) = -\infty$ car

$$\lim_{x\to 0}(nx\ln x + x - 1) = -1 \; et \; \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(n\ln x + 1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

b) Calculons $g_n(1)$ et déduisons-en le signe de $g_n(x)$

$g_n(1) = 0$. Or est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, donc

pour tout $x \in]0 ; 1]$, $g_n(x) \leq 0$

pour tout $x \in [1 ; +\infty[$, $g_n(x) \geq 0$

c) Dressons le tableau de variations de g_n

X	0	$+\infty$
$g'_n(x)$	+	
$gn(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Partie II

1) Vérifions que les courbes (C_n) passent par un même point

Soit n un entier naturel non nul et $M(x; y)$ un point du plan. On a :

$M(x; y) \in C_n \cap C_{n+1} \Leftrightarrow x^{n+1}\ln x - x^n \ln x = 0 \Leftrightarrow (x-2)x^n \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \; ou \; x = 2.$;

Pour $= 1$, on obtient le point $I(1; 0)$;

Pour $x = 2$, on obtient le point $A(2; \ln 2)$. En conclusion, il y a deux points.

2) a) Justifions la dérivabilité de f_n sur $]0 ; +\infty[$

f_n est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables

b) Déterminons $f'_n(x)$ et montrons que $f'_n(x) = (x-1)^{n-1} g_n(x)$

Pour tout reél x strictement positif, on a :

$f'_n(x) = n(x-1)^{n-1}\ln x + \frac{(x-1)^n}{x} = (x-1)^{n-1}[n\ln x + \frac{x-1}{x}] = (x-1)^{n-1} g_n(x)$

3)a)**Déterminons les variations de f_n**

* Pour n impair, on a : n-1 pair donc $(x-1)^{n-1} \geq 0$, $f_n'(x)$ a le même signe que $g_n(x)$

Sur $]0 ; 1]$, $f'_n(x) \leq 0$ donc f_n est strictement décroissante

Sur $[1 ; +\infty[$,$f'_n(x) \geq 0$ donc f_n est strictement croissante

- Pour n pair, n-1 est impair , donc

pour tout $x \in]0 ; 1]$, $(x-1)^{n-1} \leq 0$, or $g_n(x) \leq 0$ donc $f'_n(x) \geq 0$ et f_n est strictement croissante

pour tout $x \in [1 ; +\infty[$,$(x-1)^{n-1} \geq 0$, or $g_n(x) \geq 0$ donc $f'_n(x) \geq 0$ et f_n est strictement croissante

b) **Déterminons les limites de f_n en 0 et en $+\infty$**

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0}(x-1)^n \ln x = \begin{cases} +\infty \; si\; n\; est\; impair \\ -\infty \; si\; n\; est\; pair \end{cases}$$

$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty}(x-1)^n = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

c) **Dressons le tableau de variations de f_n**

pour n impair

x	0		1		$+\infty$
$f'n(x)$		-	0	+	
$fn(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Pour n pair

x	0		1		$+\infty$
$f'n(x)$		+	0	+	
$fn(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

4) **Construisons (C_2)**

Tableau de variation de f_2

X	0		1		$+\infty$
$f'_2(x)$		+	0	+	
$f_2(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2 \ln x}{x} = +\infty$$

Donc (C_2) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnée.

(Voir figure sur feuille annexe 7/7).

Partie III.

1) **Démontrons que (I_n) est décroissante et convergente**

- Pour tout $x \in [1 ;2]$, et pour tout entier naturel non nul n , on a :
  $(x-1)^{n+1} - (x-1)^n = (x-1)^n(x-2) \leq 0$, et comme $\ln x \geq 0$ on a :
  $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ donc $I_n \geq I_{n+1}$
  La suite (I_n) est décroissante

- Pour tout $x \in [1\,;2]$, $x-1 \geq 0$ donc $(x-1)^n \geq 0$ et comme $\ln x \geq 0$ on a $f_n(x) \geq 0$ et donc $I_n \geq 0$

  La suite (I_n) est décroissante et minorée (par 0), donc elle est convergente.

2) a) **Démontrons que pour tout $x \in [1\,;2]$, $\ln x \leq x$**

   Soit h la fonction définie sur $[1\,;2]$ par $h(x) = \ln x - x$

   $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \leq 0$ donc h est décroissante sur $[1\,;2]$ Or $h(1) = 0$ donc $h(x) \leq 0$, d'où $\ln x \leq x$

   b) Déduisons-en que : $f_n(x) \leq x(x-1)^n \leq 2(x-1)^n$

   $\ln x \leq x \leq 2$ et $0 \leq (x-1)^n$

   donc $f_n(x) \leq x(x-1)^n \leq 2(x-1)^n$

   c) Déduisons-en la limite de la suite (I_n)

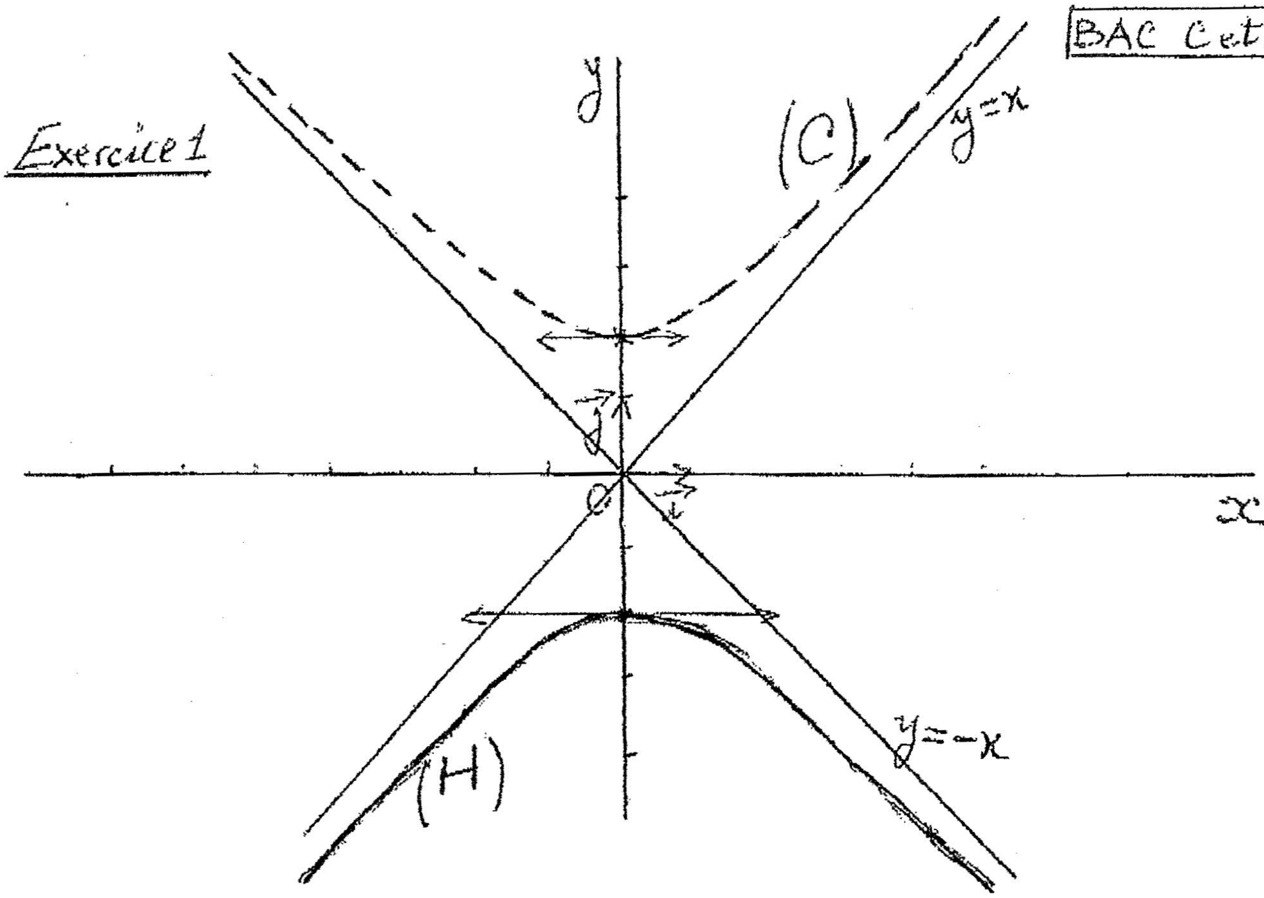
   $f_n(x) \leq 2(x-1)^n$

   Donc $I_n \leq \int_1^2 2(x-1)^n\,dx = [\frac{2}{n+1}(x-1)^{n+1}]_1^2 = \frac{2}{n+1}$

   d'où $0 \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$

   Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

Exercice 1



Problème
Partie II, 4)