

Exercice 1 (5 points)

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et f est une application affine de P dans P qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(7x + y + 3) \\ y' = \frac{1}{3}(20x + 8y + 15) \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble (Δ) des points M de P invariants par f .
2. Soit $M(x, y)$ un point du plan P n'appartenant pas à (Δ) .
 - a. Montrer que le vecteur $\overline{MM'}$ a une direction fixe.
 - b. Vérifier que la droite (MM') n'est pas parallèle à (Δ) et que le point H d'intersection des droites (Δ) et (MM') a pour coordonnées $\left(\frac{5x - y - 3}{9}, \frac{-20x + 4y - 15}{9}\right)$.
 - c. Ecrire le vecteur $\overline{HM'}$ en fonction de \overline{HM} . En déduire la nature de f dont on précisera les éléments caractéristiques.
3. On considère la suite de points $M_n(x_n; y_n)$ telle que $M_0(1; 8)$ et $M_{n+1} = f(M_n)$
 - a. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et de y_n
 - b. Montrer par récurrence que tous les points $M_n(x_n; y_n)$ sont sur la droite (\mathcal{D}) dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$.
 - c. Montrer que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.
4. Montrer que :
 - a. x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.
 - b. Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.
5. Montrer que $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$. En déduire que pour tout naturel n , $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3.

Exercice 2 (4 points)

ABC est un triangle tel que $AB = 7 \text{ cm}$, $AC = 5 \text{ cm}$ et $BC = 4 \text{ cm}$. On désigne par A' , B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1. On considère le vecteur $\vec{u} = 16\overline{BC} + 25\overline{CA} + 49\overline{AB}$.
 - a. Exprimer \vec{u} en fonction de \overline{AB} et de \overline{AC}
 - b. En déduire que $\vec{u} \neq \vec{0}$.
2. Pour tout point M du plan, on pose $f(M) = 16\overline{BC} \cdot \overline{MA'} + 25\overline{CA} \cdot \overline{MB'} + 49\overline{AB} \cdot \overline{MC'}$.
 - a. Calculer $f(O)$, O étant le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .
 - b. Montrer que $AC^2 - AB^2 = 2\overline{BC} \cdot \overline{AA'}$. On admet de la même manière que

$$BA^2 - BC^2 = 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BB'} \quad \text{et que} \quad CB^2 - CA^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'}$$

c. En déduire que si G désigne le centre de gravité du triangle ABC on a :

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{GA'} = -4; \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{GB'} = \frac{11}{2} \quad \text{et que} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GC'} = -\frac{3}{2}$$

Calculer alors la valeur de $f(G)$

d. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $f(M) = 0$.

3. a. Exprimer AA'^2 , BB'^2 et CC'^2 en fonction de AB^2 , AC^2 et BC^2 .
- b. Montrer que $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$.
- c. Quel est alors l'ensemble (\mathcal{C}) des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 78$.

Problème (11 points)

Soit n un entier naturel non nul. La fonction f_n est définie sur $]-\infty; 0]$ par :

$$f_n(x) = -x e^{\frac{1}{n^x}}, \quad \text{si } x < 0 \quad \text{et} \quad f_n(0) = 0 .$$

Partie A

1. *Etude des variations de f_n pour n entier naturel non nul.*
 - a. Prouver que la fonction f_n est continue sur $]-\infty; 0]$.
 - b. Etudier la dérivabilité de f_n en 0.
 - c. Calculer $f_n'(x)$ pour $x < 0$ et justifier que f_n est strictement ~~croissante~~ ^{décroissant} sur $]-\infty; 0]$.
2. *Etude de f_n au voisinage de $-\infty$.*
 - a. Déterminer la limite de f_n en $-\infty$
 - b. Soit la fonction g définie sur $]-\infty; 0]$ par $g(x) = e^x - x - 1$. Donner le tableau de variation de g sur l'intervalle $]-\infty; 0]$. En déduire que pour tout réel x négatif on a $0 \leq 1 - e^x \leq -x$.
 - c. Soit $t \leq 0$, en intégrant l'inégalité précédente sur $[t; 0]$, montrer que :

$$0 \leq e^t - (1+t) < \frac{t^2}{2} .$$

- d. En déduire que pour tout réel $x < 0$ on a $0 \leq f_n(x) + (x + \frac{1}{n}) \leq \frac{-1}{2n^2 x}$. Justifier alors l'existence pour la courbe (\mathcal{C}_n) de f_n , d'une asymptote (D_n) en $-\infty$. Préciser la position relative de (\mathcal{C}_n) et de (D_n) .
- e. Dresser le tableau de variation de f_n .
3. *Tracé de courbes.*
 - a. Déterminer la tangente à (\mathcal{C}_1) en 0.
 - b. Tracer (\mathcal{C}_1) et son asymptote (D_1) dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.
 - c. Démontrer que pour $n > 0$, (\mathcal{C}_n) est l'image de (\mathcal{C}_1) par l'homothétie de centre O, de rapport $\frac{1}{n}$. Construire alors (\mathcal{C}_2) sur le même graphique que (\mathcal{C}_1) .

Partie B. Etude de l'équation $f_n(x) = 1$.

- Démontrer que pour tout $n > 0$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $]-\infty; -1]$.
- Démontrer que α_n est solution de l'équation $-x \ln(-x) = \frac{1}{n}$.
- Soit h la fonction définie sur $]-\infty; -1]$ par $h(x) = -x \ln(-x)$.
 - Etudier le sens de variation de h .
 - Prouver que $-1,77 \leq \alpha_1 \leq -1,76$.
 - Démontrer que la suite (α_n) est croissante. (On remarquera que $h(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ et on comparera $h(\alpha_n)$ à $h(\alpha_{n+1})$).
- Justifier que la suite (α_n) est convergente et que sa limite est inférieure à -1 .

Partie C. Limite d'une fonction définie par une intégrale.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n = \int_{-1}^0 f_n(t) dt$.

- Montrer que la suite (I_n) est croissante.
 - Montrer que pour tout élément x de $[-1; 0]$, on a $f_n(x) \leq -x$. En déduire que pour tout $n \geq 1$ on a $I_n \leq \frac{1}{2}$.
 - Que peut-on dire de la suite (I_n) ?
- En utilisant la question d du 2 de la partie A, établir la relation $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq I_n$.
 - Déterminer la limite de (I_n) .

Bac C et E – Session 2005
Corrigé de mathématiques

Exercice 1 (5 points)

1°) Ensemble des points invariants par f

f est définie par les équations :
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(7x + y + 3) \\ y' = \frac{1}{3}(20x + 8y + 15) \end{cases}$$
 un point est invariant par f si

$f(M) = M$ alors : l'ensemble des points invariants par f est la droite (Δ) d'équation : $4x + y + 3 = 0$.

2°) a) Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

Soit $M(x; y) \in P$, $M \notin (\Delta)$, le calcul donne $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{3}(4x + y + 3)(\vec{i} + 5\vec{j})$. Puisque $M \notin (\Delta)$

Alors $\overrightarrow{MM'}$ a la direction du vecteur $\vec{u} = \vec{i} + 5\vec{j}$.

2°) b) (MM') n'est pas parallèle à (Δ). Coordonnées du point H.

(Δ) a pour équation : $4x + y + 3 = 0$ un vecteur directeur de (Δ) est : $\vec{v} = (-1; 4)$, il est évident que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires, donc (MM') et (Δ) ne sont pas parallèles.

Coordonnées de H intersection de (MM') et de (Δ).

Posons : $H(\alpha; \beta)$, $H \in (\Delta) \Leftrightarrow 4\alpha + \beta + 3 = 0$; $H \in (MM') \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{HM}; \vec{u}) = 0$. Cela conduit au

système suivant :
$$\begin{cases} 4\alpha + \beta + 3 = 0 \\ -5\alpha + \beta = -5x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{9}(5x - y - 3) \\ \beta = \frac{1}{9}(-20x + 4y - 15) \end{cases} \quad \text{CQFD.}$$

2°) c) Expression de $\overrightarrow{HM'}$ en fonction de \overrightarrow{HM} .

En utilisant les coordonnées des points H, M et M', on trouve l'égalité vectorielle:

$$\overrightarrow{HM'} = 4\overrightarrow{HM}$$

Nature et éléments caractéristiques de f.

L'égalité vectorielle nous permet d'affirmer que l'application affine f est une affinité d'axe (D), de direction $\vec{u} = \vec{i} + 5\vec{j}$ et de rapport 4.

3°) La suite des points $M_{n+1} = f(M_n)$ avec $M_0 = (1; 8)$

a) Expressions de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n .

L'expression analytique de l'application f donne :
$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}(7x_n + y_n + 3) \\ y_{n+1} = \frac{1}{3}(20x_n + 8y_n + 15) \end{cases}$$

b) Les points M_n appartiennent à une droite.

Soit (D') la droite d'équation : $5x - y + 3 = 0$; il est évident que le point $M_0(1; 8)$ est un point de cette droite.

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $M_n \in (D')$, montrons que cela entraîne que $M_{n+1} \in (D')$.

$M_n \in (D')$ équivaut à : $5x_n - y_n + 3 = 0$, dans cette condition, les coordonnées de M_{n+1} vérifient-elles l'équation de (D') ?

$5x_{n+1} - y_{n+1} + 3 = \frac{5}{3}(7x_n + y_n + 3) - \frac{1}{3}(20x_n + 8y_n + 15) + 3 = 5x_n - y_n + 3$, d'après l'hypothèse de récurrence $M_{n+1} \in (D')$; conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n \in (D')$.

Expression de x_{n+1} en fonction de x_n .

$x_{n+1} = \frac{1}{3}(7x_n + y_n + 3)$ et $M_n \in (D')$: $5x_n - y_n + 3 = 0$ alors on trouve : $x_{n+1} = 4x_n + 2$.

c) Les x_n et y_n sont des entiers.

$x_0 = 1 \in \mathbb{N}$, par récurrence on montre que les $x_n \in \mathbb{N}$.

et $y_n = 5x_n + 3$, puisque x_n est dans \mathbb{N} , alors y_n aussi.

4°) **Expression de x_n en fonction de n .**

L'égalité proposée $x_n = \frac{1}{3}(5 \times 4^n - 2)$ est vraie pour $n = 0$ ($x_0 = 1$)

Cela se démontre par récurrence sur n et utilisant la relation entre x_{n+1} et x_n .

5°) **Etude de la divisibilité de x_n et y_n .**

a) x_n divisible par 3 entraîne y_n divisible par 3.

Soit $k \in \mathbb{N}$, si $x_n = 3k$; $\Rightarrow y_n = 5x_n + 3 = 3(5k + 1) = 3k'$ avec $k' \in \mathbb{N}$.

y_n divisible par 3 implique x_n aussi.

Soit $y_n = 3k$, avec $k \in \mathbb{N}$, alors $5x_n - 3k + 3 = 0$, donc $5x_n = 3(k - 1)$

3 et 5 sont premiers d'après Gauss 3 qui divise $5x_n$ divise x_n .

b) Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3.

Supposons $\text{PGCD}(x_n; y_n) = d \neq 1$, il existe k et k' des entiers naturels tels que :

$$x_n = k d \text{ et } y_n = k' d \text{ et } 5x_n - y_n + 3 = 0 \Leftrightarrow d(k' - 5k) = 3$$

donc d divise 3,

or les diviseurs de d sont 1 et 3 on a supposé $d \neq 1$, donc $d = 3$ ce qui est absurde puisqu'on a supposé que x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3. Alors ils sont premiers entre eux.

Exercice 2 (4 points)

1°) $\vec{u} = 16\vec{BC} + 25\vec{CA} + 49\vec{AB}$

a) **Expression de \vec{u} en fonction de \vec{AB} et \vec{AC} .**

$$\vec{u} = 33\vec{AB} - 9\vec{AC}.$$

b) **Le vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$.**

Les points A, B et C sont non alignés, les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont non colinéaires.

2°) $f(M) = 16\vec{BC} \cdot \vec{MA}' + 25\vec{CA} \cdot \vec{MB}' + 49\vec{AB} \cdot \vec{MC}'$

a) **Calcul de $f(O)$.**

Les droites (OA') , (OB') et (OC') sont les médiatrices des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$

donc : $\vec{OA}' \cdot \vec{BC} = \vec{OB}' \cdot \vec{AC} = \vec{OC}' \cdot \vec{AB} = 0$, alors $f(O) = 0$

b) **L'égalité $AC^2 - AB^2 = 2\vec{BC} \cdot \vec{AA}'$**

On utilisant le carré scalaire et la propriété du milieu, on a :

$$AC^2 - AB^2 = (\vec{AC} + \vec{AB})(\vec{AC} - \vec{AB}) = 2\vec{AA}' \cdot \vec{BC}$$

c) **Utilisation des égalités 2°) b)**

$\vec{BC} \cdot \vec{GA}' = \vec{BC} \cdot (\vec{GA} + \vec{AA}')$, or G est le centre de gravité donc $\vec{GA} = -\frac{2}{3}\vec{AA}'$ et d'après la 1^{ère}

égalité du 2°) b) on a :

$$\vec{BC} \cdot \vec{GA}' = \frac{2}{6} \vec{BC} \cdot \vec{AA}' = \frac{1}{6} (AC^2 - AB^2) = \frac{1}{6} (25 - 49) = -4.$$

$$\text{de même } \vec{CA} \cdot \vec{GB}' = \frac{1}{6} (2 \vec{CA} \cdot \vec{BB}') = \frac{1}{6} (BA^2 - BC^2) = \frac{11}{2}$$

$$\text{et } \vec{AB} \cdot \vec{GC}' = \frac{1}{6} (2 \vec{AB} \cdot \vec{CC}') = \frac{1}{6} (CB^2 - CA^2) = -\frac{3}{2}$$

Calcul de $f(G)$ on utilise les résultats précédents

$$f(G) = 16 \vec{BC} \cdot \vec{GA}' + 25 \vec{CA} \cdot \vec{GB}' + 49 \vec{AB} \cdot \vec{GC}' = 0.$$

d) **Ensemble des points vérifiant $f(M) = 0$**

On montre que : $f(M) = \vec{u} \cdot \vec{MG} + f(G)$

$$f(M) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{MG} = 0$$

(Γ) est la droite passant par G, de vecteur normal \vec{u} , c'est la droite (OG) .

3°) a) **Expressions de AA'^2 , BB'^2 , CC'^2 en fonction de AB^2 , AC^2 et BC^2**

A' est le milieu de [BC], donc $AA' = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ et $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2 + AB^2 - BC^2$

$$AA'^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2)$$

Itou : $BB'^2 = \frac{1}{4}(2BC^2 + 2BA^2 - AC^2)$

$$CC'^2 = \frac{1}{4}(2CA^2 + 2CB^2 - AB^2).$$

b) Calcul de $GA^2 + GB^2 + GC^2$

G est situé au $\frac{2}{3}$ de chaque médiane ainsi $GA = \frac{2}{3}AA'$ alors :

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9}(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2) \text{ on utilise le 3°) a) e qui donne}$$

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2) = 30$$

c) Ensemble (\mathcal{C})

$M \in (\mathcal{C})$ lorsque $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 78$,

or G est isobarycentre des points A, B et C : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

Ce qui donne $MG = 4$; (\mathcal{C}) est le cercle de centre G de rayon 4.

Problème (11 points)

Partie A

1°) Variations de f_n avec $n \in \mathbb{N}$

a) Continuité de f_n sur $]-\infty; 0]$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0 = f_n(0) \text{ donc } f_n \text{ est continue en } 0.$$

f_n est continue sur $]-\infty; 0[$ car f_n est composée et produit de fonctions continues sur cet intervalle.

b) Dérivabilité de f_n en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -e^{nx} = 0 = f'_n(0), f_n \text{ est dérivable en } 0.$$

c) Dérivée et sens de variation de f_n

$$f'_n(x) = \left(\frac{1-nx}{nx} \right) e^{\frac{1}{nx}} \text{ pour } x < 0, \text{ il est évident que sur }]-\infty; 0[\text{ cette dérivée est négative, donc}$$

f_n est décroissante sur $]-\infty; 0[$.

2°) Étude de f_n au voisinage de $-\infty$.

a) Limite de f_n en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^{nx} = +\infty$$

b) Tableau de variation de g et encadrement.

$$g(x) = e^x - 1 - x \text{ sur }]-\infty; 0], g \text{ est dérivable; } g'(x) = e^x - 1$$

x	$-\infty$	0
signe de g'		-
g	$+\infty$	0

Pour tout $x \leq 0$; $g(x) \geq 0$ c-à-d $e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 1 - e^x \leq -x$ de plus $e^x \leq 1$ pour $x \leq 0$.

On a donc sur $]-\infty; 0]$: $0 \leq 1 - e^x \leq -x$.

c) Intégration des inégalités.

Pour tout $x \leq 0$ on a : $0 \leq 1 - e^x \leq -x$. intégrons ces inégalités sur $[t; 0]$, on obtient :

$$0 \leq \int_t^0 (1 - e^x) dx \leq \int_t^0 -x dx \quad \text{ce qui donne : } 0 \leq e^t - (1+t) \leq \frac{t^2}{2}$$

d) Asymptote à (C_n) en $-\infty$.

Posons : $t = \frac{1}{nx}$, $x < 0$, donc $t < 0$, d'après ce qui précède on a :

$$0 \leq e^{\frac{1}{nx}} - \left(1 + \frac{1}{nx}\right) \leq \frac{1}{2n^2x^2}, \quad x < 0 \text{ donc } -x > 0 \text{ alors : } 0 \leq -xe^{\frac{1}{nx}} + \left(x + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{-1}{2n^2x} \text{ cqfd.}$$

Cela s'écrit encore : $0 \leq f_n(x) + \left(x + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{-1}{2n^2x}$.

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2n^2x} = 0$, d'après le théorème des gendarmes on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f_n(x) + \left(x + \frac{1}{n}\right) \right] = 0$ alors la

droite (D_n) d'équation $y = -\left(x + \frac{1}{n}\right)$ est asymptote à la courbe (C_n) en $-\infty$.

e) Tableau de variation de f_n .

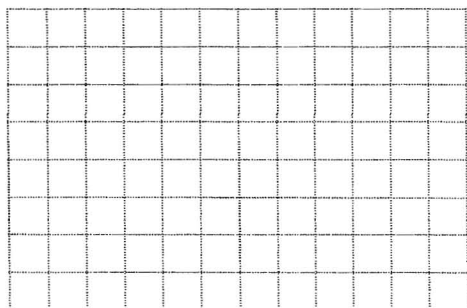
x	$-\infty$	0
signe de f'	-	
f	$+\infty$	0

3°) Tracé des courbes

a) Tangente à (C_1) en 0 .

La tangente à (C_1) en $x=0$ a pour équation : $y = 0$

b) Représentation de (C_1)



c) (C_n) homothétique de (C_1) , construction de (C_2)

L'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{n}$ a pour équations :
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{n}x \\ y' = \frac{1}{n}y \end{cases}$$

$$M(x; y) \in (C_1) \Leftrightarrow y = -xe^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow y' = -x'e^{\frac{1}{nx}} \Leftrightarrow M'(x'; y') \in (C_n).$$

(C_2) est l'homothétique de (C_1) par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.

Partie B

1°) Existence et localisation d'une solution de $f_n(x) = 1$

$n > 0$, f_n est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$,

f_n réalise une bijection de $]-\infty; 0]$ sur $[0; +\infty[$, 1 est une valeur intermédiaire alors l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha_n \in]-\infty; 0[$.

2°) α_n solution de $-x \ln(-x) = \frac{1}{n}$

Evident.

3°) Etude de la suite (α_n)

a) Sens de variation de $h(x) = -x \ln(-x)$

h est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$ et $h(-1) = 0$

b) Localisation de α_1 .

$$h(-1,77) = 1,01 \text{ et } h(-1,76) = 0,99; \quad h(-1,76) < h(\alpha_1) < h(-1,77)$$

d'où la localisation cherchée.

c) Croissance de la suite (α_n) .

$h(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ et $h(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$; alors $h(\alpha_{n+1}) < h(\alpha_n)$ puisque la fonction h est strictement

décroissante alors la suite (α_n) est croissante.

4°) Convergence de la suite

la suite (α_n) est croissante et majorée par 0 donc elle converge.

Notons α la limite de cette suite, α_n est solution de l'équation $h(x) = \frac{1}{n}$,

h est définie sur $]-\infty; -1]$ donc $\alpha_n \leq -1$ alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \leq -1$.

Partie C

1°) Etude de la suite (I_n)

a) Sens de variation

$I_n = \int_{-1}^0 f_n(x) dx$, on calcule la différence $I_{n+1} - I_n$, on montre qu'elle est positive.

Pour $x < 0$, $(n+1)x < nx \Rightarrow e^{\frac{1}{(n+1)x}} > e^{\frac{1}{nx}}$ alors en multipliant par $-x > 0$ on a : $f_{n+1} > f_n$ par suite en intégrant cette inégalité $I_{n+1} > I_n$. Cette suite est croissante.

b) Majoration de I_n

$x \in [-1; 0]$ on a $f_n(x) + x = x(1 - e^{\frac{1}{nx}}) \leq 0$, donc $f_n(x) \leq -x$. En intégrant membre à membre on a : $\int_{-1}^0 f_n(x) dx \leq \int_{-1}^0 -x dx \Leftrightarrow I_n \leq \frac{1}{2}$

c) Conclusion

La suite (I_n) est croissante et majorée donc convergente.

2°) Limite de la suite

a) Une inégalité

Au A) 2°) d) on a établi pour $x < 0$ que : $0 \leq f_n(x) + (x + \frac{1}{n}) \leq \frac{-1}{2n^2x}$, en intégrant membre à

membre on obtient : $0 \leq I_n + \int_{-1}^0 (x + \frac{1}{n}) dx \leq \int_{-1}^0 \frac{-1}{2n^2x} dx$, on sert d'une partie de cette double

inégalité à savoir : $0 \leq I_n + \int_{-1}^0 (x + \frac{1}{n}) dx$: alors $-\int_{-1}^0 (x + \frac{1}{n}) dx \leq I_n$ d'où $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq I_n$.

b) Limite de I_n .

Finalement on a : $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq I_n \leq \frac{1}{2}$. La limite de I_n est donc $\frac{1}{2}$.