BACCALAUREAT 2007
Session de Juin 2007
CORRIGE-TYPE ET BAREME

Matière : MATHEMATIQUES
Série : C

Exercice 1 (30 pts)

ABCD est un carré de centre O tel que $OA = 1$

1°) Démontrons que O est le barycentre des points pondérés $(A,1)$; $(B,-2)$; $(C,1)$ et $(D,-2)$.

$1-2+1-2=-2 \neq 0$ (1pt)

$\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=\vec{0}$ (2pts)

d'où $O = \text{bar}\{(A,1);(B,-2);(C,1);(D,-2)\}$

2) Déterminons l'ensemble (Γ) des points de $(\mathcal{E})$ tels que :
$MA^2-2MB^2+MC^2-2MD^2=-4$

Posons $\varphi(M) = MA^2-2MB^2+MC^2-2MD^2$, $M\in\mathcal{E}$
φ est la fonction scalaire de Leibniz associée au système $\{(A,1);(B,-2);(C,1);(D,-2)\}$ qui admet O comme barycentre.

$\forall M \in \mathcal{E}$, $\varphi(M) = -2MO^2-\varphi(O)$
$= -2MO^2+OA^2-2OB^2+OC^2-2OD^2$
$= -2MO^2-2$. (2pts)

$M\in(\Gamma) \Leftrightarrow \varphi(M) = -4$
$\Leftrightarrow -2MO^2=-2$
$\Leftrightarrow MO^2=1$
$\Leftrightarrow MO = 1$ (1pt)

Γ est donc la sphère de centre O et de rayon 1. (1pt)

3°) $S\in(\mathcal{E})$ et $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OS}$
d_1 demi-tour d'axe (OA)
d_2 demi-tour d'axe (OB)

a) Nature de $d_1 \circ d_2$

(OA) et (OB) sont perpendiculaires en O donc $d_1\circ d_2$ est le demi-tour dont l'axe Δ est la perpendiculaire commune à (OA) et (OB) en O. (2pts)
On a : $\Delta = (OS)$ (1pt)

b) Déterminons l'image de (Γ) par $d_1\circ d_2$.

Soit (Γ') l'image de (Γ) par $d_1\circ d_2$.
Γ' est une sphère. (1pt)
$d_1\circ d_2(O) = O$ et $d_1\circ d_2(A) = C$
donc $d_1\circ d_2(\Gamma) = \Gamma'$ est la sphère de centre O et de rayon $OC=1$
Γ et Γ' ont même centre et même rayon donc $\Gamma' = \Gamma$
$d_1\circ d_2(\Gamma) = \Gamma$ (2pts)

c) Justifions que $(A; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OA})$ est un repère orthonormé direct

ABCD est un carré de centre O tel que $OA = 1$ donc $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ et $OA=OB=1$ (2pts)
De plus $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OS}$ donc $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OS})$ est une base orthonormée directe
d'où $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OS},\overrightarrow{OA})$ est aussi une base orthonormée directe et par suite $(A, \overrightarrow{OB},\overrightarrow{OS},\overrightarrow{OA})$ est un repère orthonormé directe de $(\mathcal{E})$. (2pts) (2pts)

4) $t : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$
$M \longmapsto M'$ tel que
$\overrightarrow{BM'} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\wedge\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}$

a) Démontrons que t est une translation dont le vecteur est colinéaire à $\vec{OS}$.

$t(M)=M' \Leftrightarrow \vec{MM'}=(\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{AD})\wedge\vec{BC}$ donc t est la translation de vecteur $\vec{u}=(\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{AD})\wedge\vec{BC}$. (2pts)

Par ailleurs,

$\vec{u}=(\vec{AC}+\vec{AB}+\vec{AD})\wedge\vec{BC}$

$=2\vec{AC}\wedge\vec{BC}$

$=-4\vec{OA}\wedge(\vec{OC}-\vec{OB})$ (3pts)

$=4\vec{OA}\wedge\vec{OB}=4\vec{OS}$

En conclusion, t est la translation de vecteur $4\vec{OS}$.

b) Déterminons une équation cartésienne de l'image par t du plan (OAB).

Posons $(\mathcal{P})=t(OAB)$

$(\mathcal{P})$ est le plan parallèle à (OAB) et passant par $O'=t(O)$. (2pts)

Un vecteur normal à (OAB) est $\vec{OA}\wedge\vec{OB}=\vec{OS}$ donc un vecteur normal à $(\mathcal{P})$ est aussi $\vec{OS}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ (1pt)

$t(O)=O' \Leftrightarrow \vec{OO'}=4\vec{OS}$

$\Leftrightarrow \vec{AO'}=4\vec{OS}-\vec{OA}$

d'où $O'(0,4,-1)$. (1pt)

Une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ est de la forme $y+d=0$, $d\in\mathbb{R}$.

Or $O'\in\mathcal{P}$ donc $4+d=0$ soit $d=-4$ et par suite $(\mathcal{P})$ a pour équation cartesienne $y-4=0$ (2pts)

Exercice 2 (18pts)

1°) a. Calculons $\int_0^x te^t\,dt$, $x\in\mathbb{R}$

La fonction $t\mapsto te^t$ est continue sur $\mathbb{R}$. $0\in\mathbb{R}$ donc $\forall x\in\mathbb{R}$ $\int_0^x te^t\,dt$

existe et on a :

$$\int_0^x te^t\,dt=\left[te^t\right]_0^x-\int_0^x e^t\,dt$$

$$\int_0^x te^t\,dt=xe^x-e^x+1 \quad (3pts)$$

b) $a\in\mathbb{R}$ et $u: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto xe^x+a$

U est la primitive de u sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

i) Exprimons U(x) à l'aide d'une intégrale.

La fonction u est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet de primitive sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $U(x)=\int_0^x(te^t+a)\,dt$ (2pts)

ii) Déduisons-en U(x) en fonction de x.

De la question a, on déduit que : (3pts)

$\forall x\in\mathbb{R}$, $U(x)=xe^x-e^x+1+ax$.

2) f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=xe^x-2\int_0^1 f(x)\,dx\\ f(0)=0.\end{cases}$$

Calculons $\int_0^1 f(x)\,dx$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$. $0\in\mathbb{R}$ et $1\in\mathbb{R}$ donc $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe.

Posons $c=-2\int_0^1 f(x)\,dx$.

$$\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=xe^x+c\\ f(0)=0\end{cases} \Leftrightarrow f(x)=\int_0^x(te^t+c)\,dt \quad (2pts)$$

$f(x) = \int_0^x (te^t + c)\,dt$

$= \int_0^x te^t\,dt + c\int_0^x dt$

$f(x) = xe^x - e^x + 1 + cx$. (2pts)

$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xe^x\,dx + \int_0^1 (-e^x + 1 + cx)\,dx$

$= 1 + \left[-e^x + x + \frac{1}{2}cx^2\right]_0^1$

$= 1 + \left(-e + 1 + \frac{1}{2}c + 1\right)$

$= 3 - e + \frac{1}{2}c$ (2pts)

$= 3 - e - \int_0^1 f(x)\,dx$

$\int_0^1 f(x)\,dx = 3 - e - \int_0^1 f(x)\,dx \iff$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3-e}{2}$$ (4pts)

Problème

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x + \sqrt{x^2+5}$

$(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité 2cm).

Partie A

1°) Etudions les variations de f.

• Soit D l'ensemble de définition de f

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2+5 \geq 0\}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+5 > 0$ donc $D = \mathbb{R}$. (1pt)

• limites en $-\infty$ et $+\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{\sqrt{x^2+5} - x} = 0$ (2pts)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (1pt)

• f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x^2+5}}$ (2pts)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (1pt)

Tableau de variations

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

(1pt)

2) $K = f(\mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow K$

$x \longmapsto f(x)$

a. Démontrons que g est une bijection

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) = K$ donc g est une bijection. (2pts)

b) Déterminons $g^{-1}(x)$ pour $x \in K$

soit $x \in K$ et $y \in \mathbb{R}$.

$g^{-1}(x) = y \iff g(y) = x$

$\iff y + \sqrt{y^2+5} = x$

$\iff \sqrt{y^2+5} = x - y$

$\iff \begin{cases} x - y \geq 0 \\ y^2 + 5 = x^2 + y^2 - 2xy \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x - y \geq 0 \\ y = \frac{x^2-5}{2x} \end{cases}$

Pour $y = \frac{x^2-5}{2x}$, on $x - y = \frac{x^2+5}{2x} > 0$

donc $g^{-1}(x) = y \iff y = \frac{x^2-5}{2x}$

$\forall x \in K$, $g^{-1}(x) = \frac{x^2-5}{2x}$ (3pts)

3) a. Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

(E) : $y^2 - 2xy - 5 = 0$

$\begin{cases} (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \\ y^2 - 2xy - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \\ y(y-2x) = 5 \end{cases}$ (*)

(*) $\iff \begin{cases} y = 1 \\ y - 2x = 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = -1 \\ y - 2x = -5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = 5 \\ y - 2x = 1 \end{cases}$

ou $\begin{cases} y = -5 \\ y - 2x = -1 \end{cases}$ (2pts)

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \end{cases}$ (4pts)

Soit S l'ensemble des solutions

$S = \{(-2,1); (2,-1); (2,5); (-2,-5)\}$

b) Déduisons-en les points de $(\mathcal{C})$ dont les deux coordonnées sont des entiers relatifs.

$$\begin{cases} (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \\ M(x,y) \in \mathcal{C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \\ y = x + \sqrt{x^2+5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \\ y - x \geq 0 \\ y^2 - 2xy - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{(2pts)}$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in \{(-2,1); (2,5)\}$$

Les points recherchés sont $A(-2,1)$ et $B(2,5)$. (2pts)

Partie B

M et M' sont deux points distincts de $(\mathcal{C})$ d'abscisses opposées.

4) a. Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, On considère les points $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ tels que $x' = -x$. $y = f(x)$ et $y' = f(x') = f(-x)$.

$$\overrightarrow{MM'} = (x'-x)\vec{u} + (y'-y)\vec{v}$$
$$= -2x\vec{u} - 2x\vec{v}$$
$$= -2x(\vec{u}+\vec{v}). \quad \text{(2pts)}$$

$\overrightarrow{MM'} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{u}+\vec{v}$ donc $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe qui est celle du vecteur non nul $\vec{u}+\vec{v}$. (2pts)

b) Démontrons que l'application affine D qui transforme M en M' a pour expression analytique $\begin{cases} x = -x \\ y = -2x + y \end{cases}$

$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MM'} = -2x\vec{u} - 2x\vec{v}$

donc $\begin{cases} x'-x = -2x \\ y'-y = -2x \end{cases}$ soit $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2x + y \end{cases}$

d'où M' est l'image de M par l'application affine D d'écriture complexe $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2x + y \end{cases}$ (3pts)

5) a. Déterminons l'ensemble des points invariants par D.

Soit $M(x,y)$.

$D(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2x \\ y = -2x + y \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

L'ensemble des points invariants par D est la droite d'équation $x = 0$. (2pts)

b) Démontrons que le milieu de $[MM']$ appartient à la droite de repère $(O, \vec{v})$.

Soit I le milieu de $[MM']$.

si $M(x,y)$ alors $I(0, -x+y)$

d'où I est un point de la droite de repère $(O; \vec{v})$. (2pts)

c) Déterminons la nature de D

L'ensemble des points invariants par D est la droite de repère $(O, \vec{v})$.

- Pour tout point M d'image M' par D, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}+\vec{v}$
- Soit M un point du plan et H son projeté sur la droite de repère $(O, \vec{v})$ suivant la direction de $\vec{u}+\vec{v}$.

Supposons $H(x_H, y_H)$.

On a : $\begin{cases} x_H = 0 \\ x - x_H = t \\ y - y_H = t \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = -x + y \end{cases}$

donc $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HM'}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

On a alors $\overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}$.

De tout ce qui précède, on déduit que D est l'affinité d'axe la droite de repère $(O, \vec{v})$, de direction celle du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ et de rapport -1. (3pts)

d) (Δ) est la droite d'équation $y=0$

i) Déterminons l'image Δ' de Δ par D.

Soit $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ tel que $M'=D(M)$

$D(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} x=-x' \\ y=y'-2x' \end{cases}$

$M\in\Delta \Leftrightarrow y=0$ (3pts)

$\Leftrightarrow y'-2x'=0$ donc Δ' est la droite d'équation $y=2x$.

ii) Démontrons que (Δ) et (Δ') sont asymptotes à $(\mathcal{C})$.

- $\lim_{-\infty} f = 0$ donc (Δ) est asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$ (1pt)

- $\lim_{+\infty} f = +\infty$. $f(x)-2x = \dfrac{5}{\sqrt{x^2+5}+x}$ (1pt)

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=0$ donc (Δ') est asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$. (1pt)

iii) Précisons les asymptotes de $(\mathcal{C}')$

$(\mathcal{C}')$ est l'image de $(\mathcal{C})$ par la réflexion $D_{\mathcal{D}}$ d'axe $(\mathcal{D})$ d'équation $y=x$, Δ et Δ' sont les asymptotes de $(\mathcal{C})$ donc les asymptotes de $(\mathcal{C}')$ sont les images de (Δ) et (Δ') par $D_{\mathcal{D}}$.

On a $D_{\mathcal{D}}(\Delta): x=0$ (2pt)

$D_{\mathcal{D}}(\Delta'): x-2y=0$

$y=\frac{1}{2}x$. (2pt)

c) Construction de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$

(Voir papier millimétré).

Partie C

$E=\{z\in\mathbb{C} \mid z-i\bar{z}\neq 0\}$

6) Déterminons E

Posons $z=x+iy$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$z-i\bar{z}=0 \Leftrightarrow x+iy-i(x-iy)=0$

$\Leftrightarrow x+iy-ix-y=0$

$\Leftrightarrow x-y+i(y-x)=0$

$\Leftrightarrow x=y$

$\Leftrightarrow z=x(1+i)$, $x\in\mathbb{R}$.

Posons $E'=\{z\in\mathbb{C} \mid z=x(1+i), x\in\mathbb{R}\}$

On a : $E=\mathbb{C}-E'$ (2pts)

7) a. $\Gamma=\{M\in\mathcal{B} \mid |z'|=\sqrt{2}\}$

$|z'|=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\dfrac{2x-2i\sqrt{5}}{(x-y)(1-i)}\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 4x^2+20=4(x-y)^2$

$\Leftrightarrow x^2+5=x^2+y^2-2xy$

$\Leftrightarrow y^2-2xy-5=0$ (2pts)

(Γ) a pour équation cartésienne $y^2-2xy-5=0$.

$M(x,y)\in\Gamma \Leftrightarrow y^2-2xy-5=0$

$\Leftrightarrow (y-x)^2-x^2-5=0$

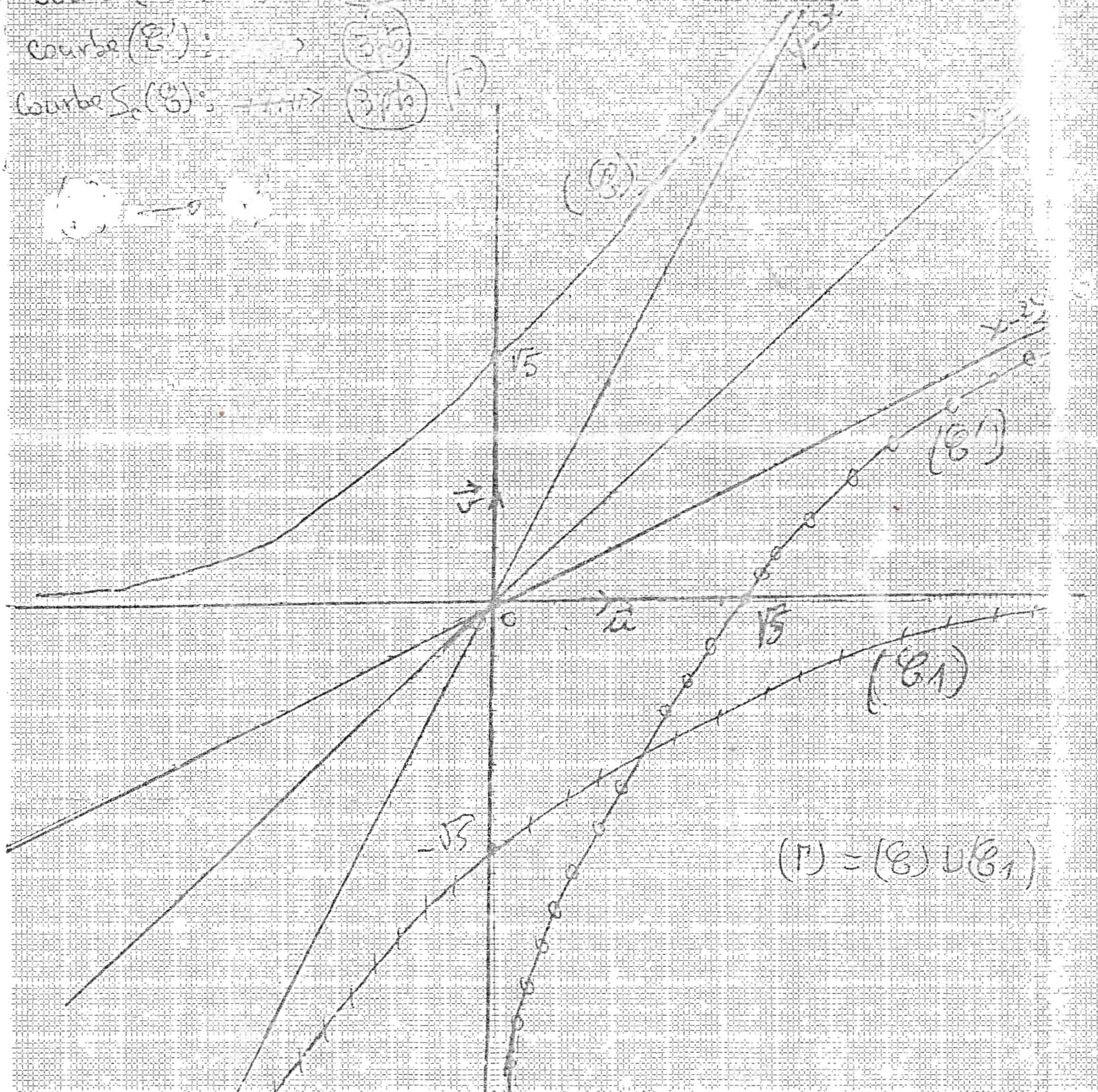
$\Leftrightarrow \left\| \begin{array}{l} y-x=\sqrt{x^2+5} \text{ ou} \\ y-x=-\sqrt{x^2+5} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\| \begin{array}{l} y=x+\sqrt{x^2+5} \\ \text{ou} \\ y=x-\sqrt{x^2+5} \end{array}\right.$ (2pts)

Courbe $(\mathcal{C})$: → 3pts

Courbe $(\mathcal{C}')$: → 3pts

Courbe $S_o(\mathcal{C})$: → 3pts



$\Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ \text{ou} \\ y = f_1(x) \end{cases}$ avec $f_1(x) = x - \sqrt{x^2+5}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-f(-x) = -(x + \sqrt{x^2+5})$
$= +x - \sqrt{x^2+5}$
$= f_1(x)$ (2pts)

donc la courbe $(\mathcal{C}_1)$ de f_1 est l'image de $(\mathcal{C})$ par la symétrie de centre O et

$M \in \Gamma \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}$ ou $M \in \mathcal{C}_1$

d'où $\Gamma = (\mathcal{C}) \cup (\mathcal{C}_1)$ où $(\mathcal{C}_1)$ est le symétrique de $(\mathcal{C})$ par rapport à O. (2pts)

b) Construction de (Γ)

(voir papier millimétré)

c) Déterminons une équation cartésienne de (Γ) dans $(O, \vec{u}, \vec{u}+2\vec{v})$.

Soit $M(x, y)$ dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$
et $M(X, Y)$ dans $(O, \vec{u}, \vec{u}+2\vec{v})$

On a : $x\vec{u} + y\vec{v} = X\vec{u} + Y(\vec{u}+2\vec{v})$
$= X\vec{u} + Y\vec{u} + 2Y\vec{v}$
$= (X+Y)\vec{u} + 2Y\vec{v}$

donc $\begin{cases} x = X+Y \\ y = 2Y \end{cases}$ (1pt)

$y^2 - 2xy - 5 = 0 \Leftrightarrow 4Y^2 - 4Y(X+Y) - 5 = 0$
$\Leftrightarrow 4Y^2 - 4XY - 4Y^2 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow -4XY - 5 = 0$
$\Leftrightarrow 4XY + 5 = 0$
$\Leftrightarrow XY = \frac{-5}{4}$

$\boxed{\Gamma : XY = -\frac{5}{4}}$ (2pts)

Déduisons la nature de Γ

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{u}+2\vec{v})$ Γ a une équation de la forme $XY = k$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ donc Γ est une hyperbole. (1pt)